



Marc Gabay

PLAN DU COURS

I. CARACTERES GENERAUX DES SYMETRIES BRISEES

I. A Classification zoologique d'Ehrenfest.

I. B Concept de symétries brisées: symétrie rime (généralement) avec entropie.

- symétries globales continues
- symétries locales de jauge continues
- symétries discrètes

I. C Introduction d'un paramètre d'ordre m .

- quantifie la brisure de symétrie
- classification de Landau des transitions
- au-delà de la classification de Landau

II. THERMODYNAMIQUE LORS D'UNE BRISURE DE SYMÉTRIE

II. A Champ moyen de Weiss

II. B Énergie libre de Landau au voisinage de T_c

- Transition du 2nd ordre**
- Transition du 1^{er} ordre**
- Changement d'ordre de la transition (point tricritique)**
- Exposants critiques et relations entre exposants**

III. LA TRANSITION BEREZINSKII-KOSTERLITZ-THOULESS (BKT) A 2D

**III. A Fluctuations de grandes longueurs d'ondes
du modèle XY. Quasi-ordre de phase**

**III. B Défauts topologiques : description heuristique
de la transition BKT**

- Vortex - Antivortex

IV. PHENOMENES CRITIQUES

IV. A Fluctuations, longueur de corrélation.

IV. B Critère de Ginzburg.

IV. C Fonctions de corrélation spin-spin.

IV. D Universalité, lois d'échelle; relations entre exposants critiques.

IV. E Exemple simple de groupe de renormalisation.

I. CARACTERES GENERAUX DES SYMETRIES BRISEES

Des transitions réversibles entre phases peuvent être observées

- ❖ à la limite thermodynamique
- ❖ à paramètres intensifs fixés (P, T, H, E, \dots)

A l'origine de ces phénomènes se trouvent les interactions entre entités constituant le système, qui peuvent favoriser différents états d'équilibre macroscopique.

II. A Champ moyen de Weiss

II. A2 Cas des spins sur réseau (rappel)

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j)$$

$J > 0$



ferromagnétisme

$\mathbf{S}_i = S_i - s_z \mathbf{u}_z + s_z \mathbf{u}_z = s_z \mathbf{u}_z + \delta \mathbf{S}_i$. On néglige $\delta \mathbf{S}_i \cdot \delta \mathbf{S}_j$ dans H . On a alors un problème de spins indépendants plongés dans un champ moyen. On calcule la fonction de partition

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\varphi, \theta\}} \exp - \beta H$$

à la limite thermodynamique $N \rightarrow \infty$

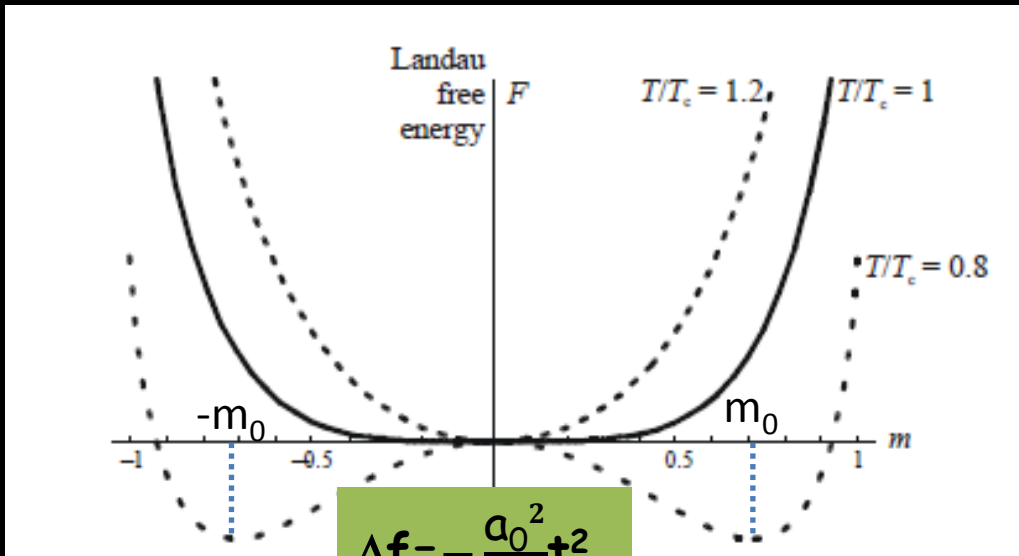
[retour](#)

Près de T_c ,

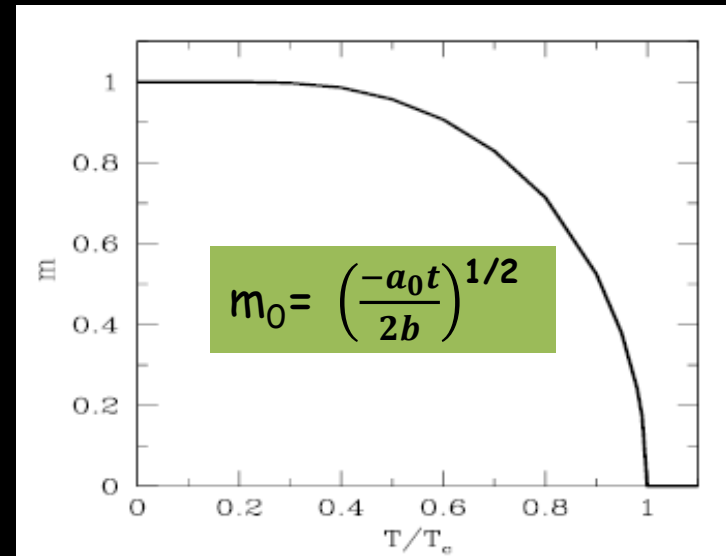
$$m_z = g\mu_B s_z = g\mu_B L(\beta g\mu_B B_m)$$

où $L(x) = \coth(x) - 1/x$

$$f = \frac{1}{2} \frac{zJ}{(g\mu_B)^2} \left[m_z^2 \left(1 - \frac{\beta z J}{3} \right) + m_z^4 \frac{3}{10g^2\mu^2} \right]$$



$$\Delta f = -\frac{a_0^2}{4b^2} t^2$$



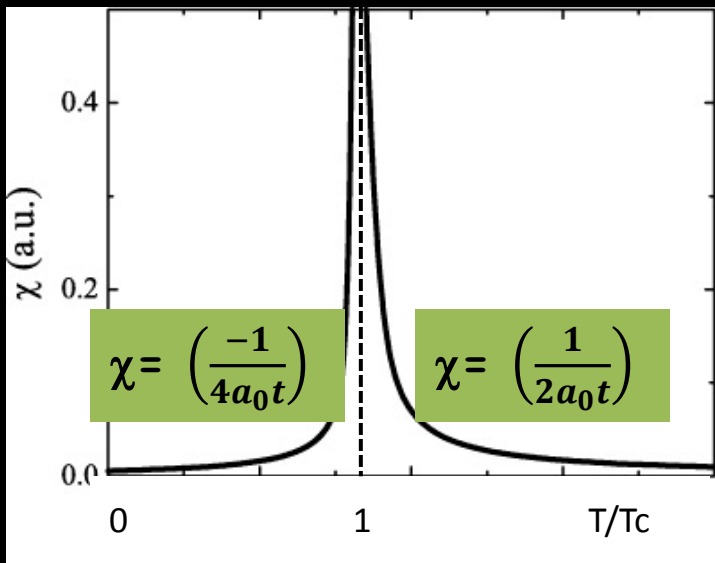
$$m_0 = \left(\frac{-a_0 t}{2b}\right)^{1/2}$$

[retour](#)

$$\Delta f = a_0(T - T_c) m^2 + b(m^2)^2$$

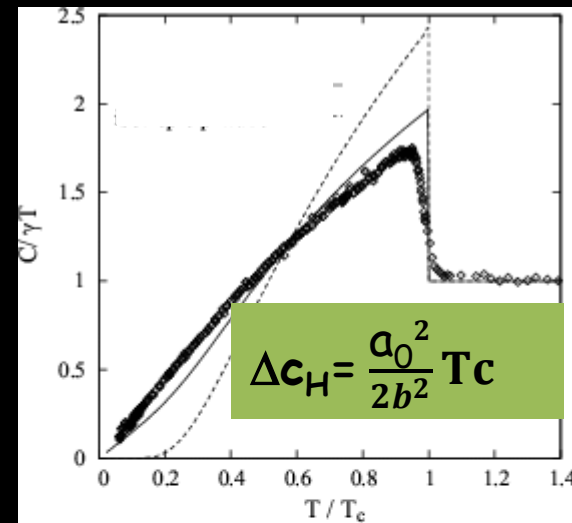
$t = T - T_c \ll 1$

énergie libre par unité de volume.



$$\chi = \left(\frac{-1}{4a_0 t}\right)$$

$$\chi = \left(\frac{1}{2a_0 t}\right)$$



$$\Delta C_H = \frac{a_0^2}{2b^2} T_c$$

Exposants critiques de champ moyen

grandeur	comportement $T \geq T_c$	comportement $T \leq T_c$
ΔC_H	$\dagger^{-\alpha}$	$(-\dagger)^{-\alpha'}$
m_0	-	$(-\dagger)^\beta$
χ	$\dagger^{-\gamma}$	$(-\dagger)^{-\gamma'}$
ξ	$\dagger^{-\nu}$	$(-\dagger)^{-\nu'}$

$$m_0(T_c) \sim \text{sign}(H)H^{1/\delta}$$

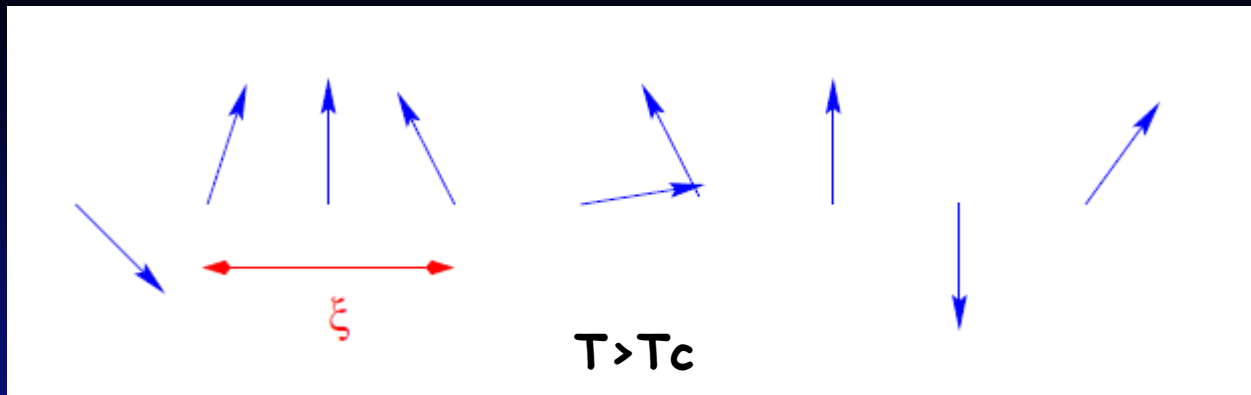
$\alpha = \alpha'$	0
β	1/2
$\gamma = \gamma'$	1
δ	3

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$$

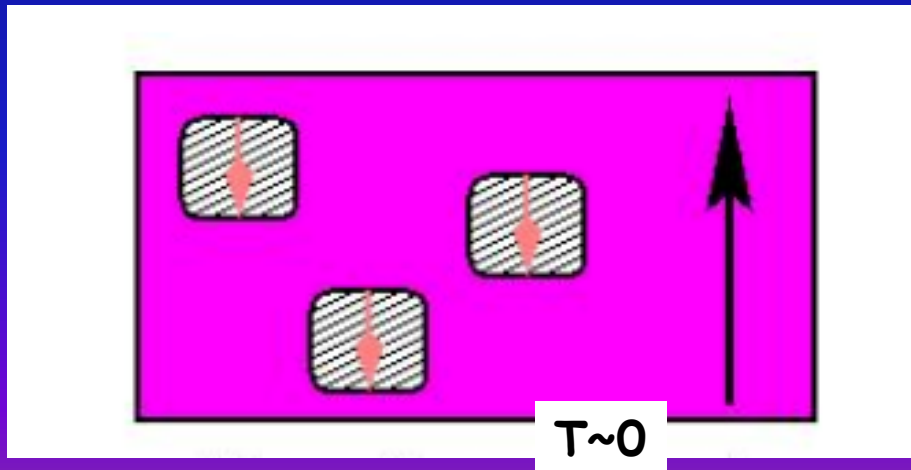
← cf relation thermodynamique
d'Ehrenfest pour une transition du 2^{ème} ordre

Les fluctuat

oisinage de T_c



A T_c , ξ diverge; tout les spins sont corrélés (mais l'ordre à longue portée n'est pas encore établi)



$$\Delta E = 2L \times J \rightarrow$$

L aussi petit que possible

$$\xi \sim a$$

On introduit donc les termes de fluctuation par rapport au comportement moyen

cf champ moyen de Weiss

$$\delta S_i \equiv S(x_i) - m_0; \quad \delta S_j \approx \delta S(x_i) + \sum_j a u_j \cdot \nabla S$$

a est le pas du réseau

$$\text{alors, } \Delta f = a_0(T - T_c) m^2 + b(m^2)^2 + K(\nabla m)^2$$

$t = T - T_c \ll 1$

Si m varie sur la distance ξ , $\nabla m \sim m/\xi \Rightarrow$

$$\xi \sim \left(\frac{K}{a_0 |T - T_c|} \right)^{1/2}$$

$\nu = \nu' = 1/2$ cf exposants de champ moyen

Critère de Ginzburg

Les fluctuations, lorsqu'elles sont importantes peuvent modifier T_c , l'ordre de la transition, les exposants critiques.

A D dimensions, cela se produit si $\underline{\Delta f}$ ($\equiv \frac{a_0^2}{4b^2} t^2$) $\sim k_B T_c / \xi^D$

Vérifié si $D \leq 4$

Autre façon de retrouver ce critère : si les fluctuations thermiques de m autour de la valeur moyenne deviennent d'ordre 1

$$\langle (\delta m)^2 \rangle_T / m^2 \sim 1$$

$$\text{fluctuation-dissipation} \Rightarrow \beta \langle (\delta m)^2 \rangle_T = \chi / V \equiv \chi / \xi^D$$

Ces fluctuations amènent à introduire la fonction de corrélation spin-spin

$$\langle S_i \cdot S_j \rangle \sim 1/r^{D-2+\eta} \exp -r/\xi \quad T > T_c$$

$$\langle S_i \cdot S_j \rangle \sim 1/r^{D-2+\eta} \quad T = T_c \quad r \equiv |x_i - x_j|$$

$$\langle S_i \cdot S_j \rangle - m^2 \sim 1/r^{D-2+\eta} \exp -r/\xi \quad T < T_c$$

La théorie de Curie-Landau s'avère très féconde, mais des déviations sont observées par rapport à ses prédictions :

I. Les exposants critiques dépendent du nombre de composantes n du p.o à D donnée et de D à n donné. Ils diffèrent des exposants de champ moyen.

Exposants Critiques	Champ moyen	Ising D=2	Ising D=3	XY D=3	Heisenberg D=3
$\alpha = \alpha'$	0	0	0.12	- 0.013	- 0.13
β	1/2	1/8	0.326	0.348	0.368
$\gamma = \gamma'$	1	7/4	1.24	1.318	1.392
δ	3	15	5.2		
ν	(1/2)	1	0.631	0.68	0.708
η	(0)	1/4	0.035	0.037	0.037

Lois d'échelle, relations entre exposants critiques

A T_c , tous les spins sont corrélés; $\langle S_i \cdot S_j \rangle \sim 1/r^{D-2+\eta}$ montre que le système est « invariant d'échelle » c'est-à-dire que $r \rightarrow r' = \lambda r$ donne la même fonction à un facteur de proportionnalité près.

On fait l'hypothèse que cela reste vrai **au voisinage de T_c** . Le choix $\lambda \equiv \xi^{-1}$ rend r' adimensionné.

Exemple 1 :

$$r = \xi r' ; m_i \sim t^\beta m'_i \equiv \xi^{-\beta/\nu} m'_i \quad (\text{variables prime sans dimension})$$

$$\langle S_i \cdot S_j \rangle \sim \langle m_i \cdot m_j \rangle \sim 1/r^{D-2+\eta} \Rightarrow 2\beta = (D-2+\eta)\nu$$

Exemple 2 :

$$m = \chi H ; m \sim t^\beta m' \equiv \xi^{-\beta/\nu} m' ; \chi \sim t^{-\gamma} \chi' \equiv \xi^{\gamma/\nu} \chi' \Rightarrow H \sim \xi^{-(\beta+\gamma)/\nu} m' / \chi'$$

$$\text{à } T_c, m \sim H^{1/\delta} \Rightarrow \beta(\delta-1) = \gamma$$

Exemple 3 :

$$\Delta f \sim t^{2-\alpha} \equiv \xi^{-(2-\alpha)/\nu} \Delta f' \quad (C_H \sim t^{-\alpha}) ; \text{ or } \Delta f \sim k_B T / \xi^D$$

$$\Rightarrow D\nu = 2 - \alpha$$

Lois d'échelle, relations entre exposants critiques

Retrouver les lois de la physique grâce à l'homogénéité

Ex : 3^{ème} loi de Kepler relative au mouvement des planètes autour du soleil.

$$E = m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - \frac{GMm}{r}$$

$a \equiv$ demi grand axe de l'ellipse décrite par la planète autour du soleil
 $T \equiv$ période de l'orbite

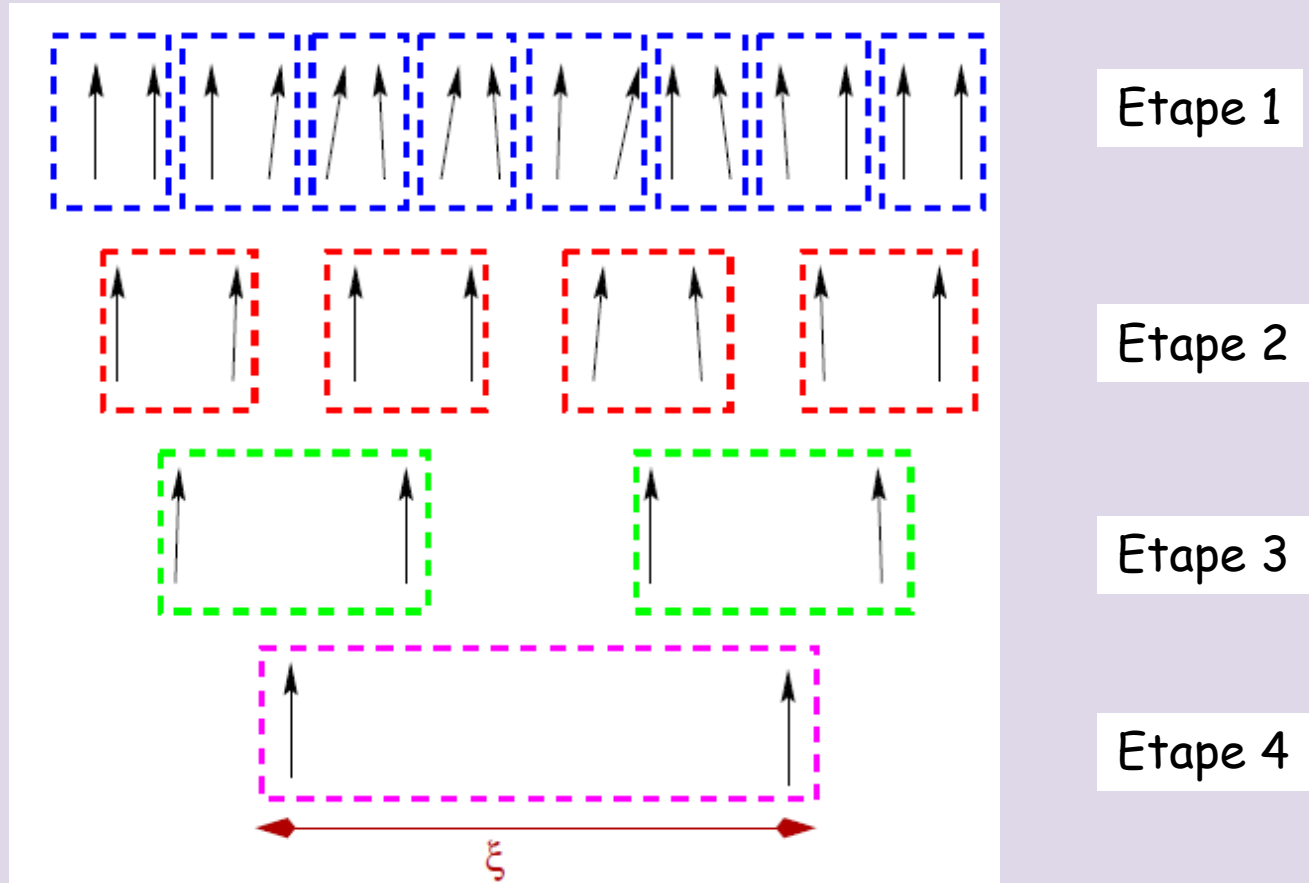
$$\vec{r} = a \vec{r}' ; t = T t' \Rightarrow E = m \left(\frac{a^2}{T^2} \left(\frac{dr'}{dt'} \right)^2 - \frac{GM}{r'} \frac{1}{a} \right) \Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \text{Cste } GM$$

Relations entre exposants critiques : résumé

$$\begin{aligned}\gamma &= \nu(2-\eta) ; \alpha + 2\beta + \gamma = 2 ; \alpha = 2 - \nu D ; \\ \beta &= 1/2 \nu(D - 2 + \eta) ; \delta = (D + 2 - \eta)/(D - 2 + \eta)\end{aligned}$$

2 exposants seulement sont indépendants.

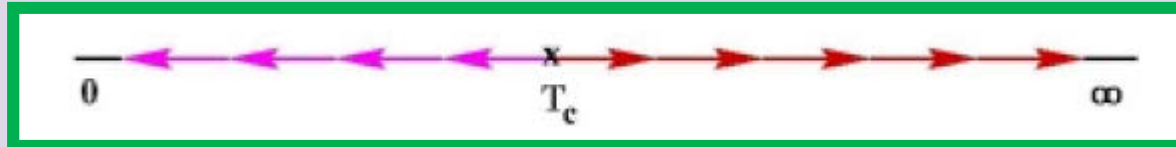
Le groupe de renormalisation pour « les nuls »



Si $T \geq T_c$ les blocs sont découplés après l'étape 4 (l'ordre existe seulement jusqu'à la taille ξ). Le système ressemble à la limite paramagnétique de $T = \infty$.

Si $T \leq T_c$ les blocs sont **couplés** après l'étape 4 (les fluctuations d'ordre existent seulement jusqu'à la taille ξ). Le système ressemble à la ferromagnétique de $T = 0$.

Le groupe de renormalisation pour « les nuls »

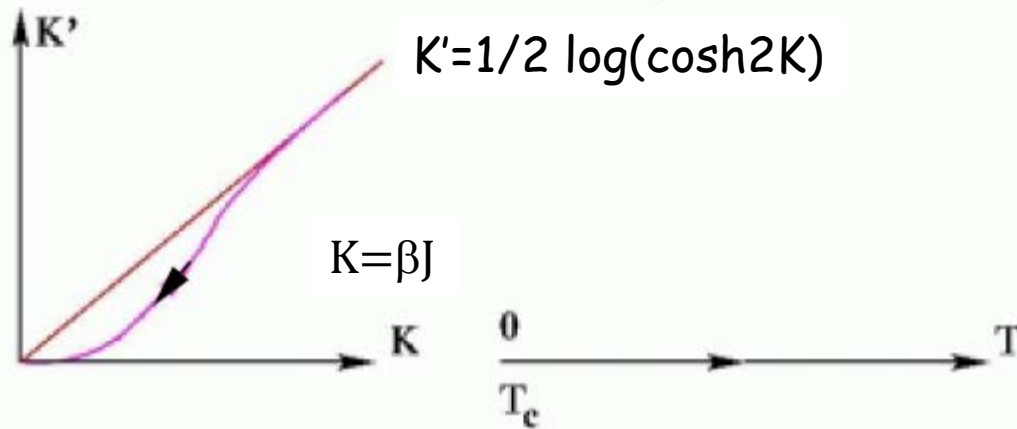
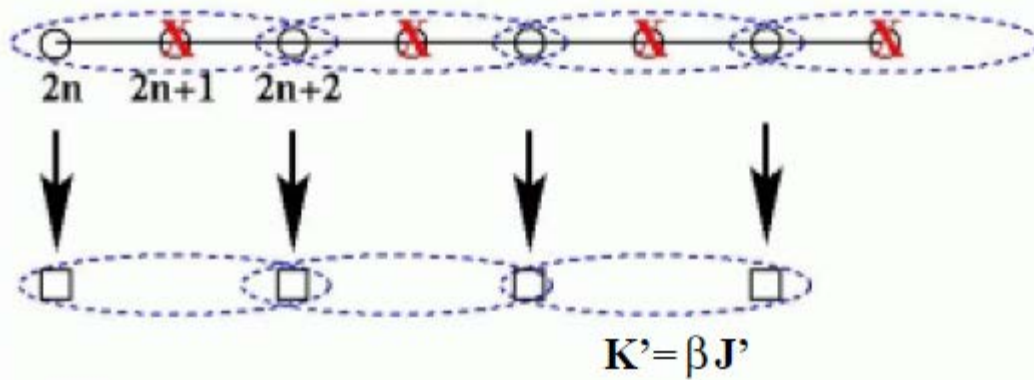


Ising à D=1

$$H = -J \sum_i S_i \cdot S_{i+1}; \quad J > 0$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{S_i = \pm 1\}} \exp -\beta H$$

$$\sum_{S_{2n+1} = \pm 1} \exp \beta (J S_{2n} S_{2n+1} + J S_{2n+1} S_{2n+2}) = A \exp \beta J' S_{2n} S_{2n+2}$$



Donc Ising à $D=1$ n'a pas de transition de phase à T finie

La théorie de Curie-Landau s'avère très féconde, mais des déviations sont observées par rapport à ses prédictions :

II. L'existence, l'ordre et la nature de la transition de phase à **T finie** dépend de n , D , de la portée des interactions.

Nature du paramètre d'ordre	Transition à $D=1$ Ordre	Transition à $D=2$ Ordre	Transition à $D=3$ Ordre
Ising	✗	✓ 2	✓ 2
Potts	✗	✓ 1 ET 2	✓ 1 ET 2
XY	✗	✓ BKT	✓ 2
Heisenberg	✗	✗	✓ 2